

量と単位をめぐる問題と討論

Discussion on the Problems Existing around Quantities and Units

久保 和良
KUBO, Kazuyoshi

1. 緒言

事の起こりは教室にあった。本校4年電子制御工学科の2007年度後期授業「計測工学Ⅰ」で単位と標準の項目を説明した時の出来事である。筆者は「公文書では国際単位系 (SI) を使わなくては行けません。諸君も来年度の卒業研究論文の作成時には、この点に留意するように。」と説明し、次に質疑応答に移ったとき、1人の学生が質問してくれた。「先生、単位に括弧をつけてはいけませんか？」— 筆者が生涯で出合った質問の中で、最も優れた質問の一つであり、なおかつ筆者はこの問に対する答を持っていなかった。これを機に、量の表現と単位の問題を検討することにした。なぜ自分の中ですっきりした解答が得られないかという疑問があり、末席に在るとはいえ1人の学徒として、正解に至る過程でカッコ悪く苦しむ背中を学生に見せて何かを学ばせたいという思いがあった。高等教育機関である高専の教育は真理の探究や本質のみきわめを通じて学生に勉学のスタイルを確立させるものであるべきで、正解は一つではないかもしれないし、教師も間違えるかもしれない。本稿は、学生への回答を重ねる過程で伝えたことを再構成したものである。

一般に「単位」という術語には計量単位、組織の要素、教育機関の履修計算の基準、禅宗での座位などの意味があるが、本稿では計量単位を指すものとする。また「量」という術語には測定の対象になる大小比較が可能な物理量、論理学における判断または真理値、インド哲学における知識一般のことなどの意味があるが、本稿では物理量を指すものとする。

中学を卒業した生徒に「2辺の長さが各々 2 m, 3 m の長方形の面積 S を求めよ」という問題が与えられたとき、ほとんどの生徒は次のように回答するようである。

$$S = 2 \times 3 = 6 (\text{m}^2) \quad (1)$$

最後の部分を「 $= 6 [\text{m}^2]$ 」や、「 $= 6$. 答. 6 m^2 」とするバリエーションがある。筆者は (1) が誤りであることを指摘できるが、同時に許容することができる。なぜ許容できるかと自問すると、おそらくそのような教育を受けたからであり、試験でこのように書くとマルがもらえたからではないかと思われる。回答側から見て、出題者の意図は長方形の面積の公式 $S = ab$ が使えて、数値計算 $2 \times 3 = 6$ ができて、単位付きの結論 $6 (\text{m}^2)$ を書かせる狙いがうかがえるので、こう回答すればマルがもらえるだろうと推測するのが学生の立場である。しかしながら長方形の面積の出題は、必ずしも出題者の意図が明らかとは思えない。量の表現として単位表記の問題もそうであるし、面積を求める式についても同様である。式 $S = ab$ は「長方形の面積は縦の長さ a に比例し、かつ横の長さ b にも比例する」という面積の表現であり、双線型形式による簡潔な数学的表現にすぎない。多くの高専生はこれを「公式」と呼ぶのである。

量は「数値×単位」の形で表現される。×は積の意味である。量も数値変数も斜体文字で表し、数学記号や単位は立体文字で表されるので、長さの量 a は $a = y \text{ m}$ と表すのが量の表現である。数値 y と、単位 m の間には、半角スペースを入れる決まりになっている。従って、先の問題の正解はとりあえず次のようになる。

$$\text{長方形の2辺の長さを各々 } a, b \text{ とすれば } S = ab = 2 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 6 \text{ m}^2 \quad (2)$$

(1) の誤りは、量と数値を混同した点にある。おそらく物理量を忠実に表現した回答を期待する出題者には、(1) は面積の数値計算が示してあって、最後に括弧付きの単位が札としてついていると見えるの

ではないかと推測される。

2. 国際単位系及び工業規格における単位と量の表現

単位とそれに関わる量の表現については、国際的な決め事と日本国内の決め事がある。国際的な決め事としては国際単位系 (SI) を説明したSI文書 (SI brochure -8th Edition-) があり、歴史的な背景からフランス語の版が正式とされ、その英語版を日本語に翻訳した日本語版⁰¹⁾ が出版されている。これらは産業技術総合研究所のホームページからリンクをたどって読むことができる。本稿では日本語の書籍版を参照するが、この版での疑義はより権威のある版にさかのぼることになる。

日本国内の決め事の重要な3つのうち第1は計量法であり、経済産業省のホームページ内のリンクをたどって最新の版を読むことができる。日本国内の決め事の第2はJISであり、JIS Z8202 は「量及び単位」に対応する。これは国際規格 ISO 31 を翻訳して追補編集したものであって、JISと計量法の対応表なども添付されている。またJIS Z8203 は「国際単位系 (SI) 及びその使い方」に対応して、これは国際規格 ISO 1000 を翻訳して追補編集したものである。JISはホームページ参照による公開はなく、筆者が参照したのはJISハンドブック⁰³⁾ である。日本国内の決め事の第3は旧文部省の著作権所有になる学術用語集であり、筆者の参照した計測工学編⁰⁴⁾ の第3部には「量とその単位」があるものの、SI文書とJISを超えるものではない。

さて、本稿で扱う主な課題、即ち「単位に括弧をつけてはいけませんか？」に沿って、上述の4つの資料を読んでみると、驚くことに単位に括弧をつけることに言及している部分が見当たらないのである。ない事を証明するのは難しいのであるが、どうも見つからない。文書全体をわたって一貫しているのは単位に括弧をつけない方法で量の例示がなされているものの、括弧をつけてはならないとは一言も見当たらない。ということは、必要に応じて括弧をつけても罰せられることも非難されることもなさそうである。上述4資料のうち、基幹となる部分はSI文書、JIS Z8202、JIS Z8203 の3文書に集約されているので、これらを検討しよう。先ずSI文書についての要点は次の通りである。

1. 1節の「量と単位」の項に「量 (quantity) の値 (value) は一般に数字 (number) と単位 (unit) の積として表される」とある。英語版を参照すると「表される」には expressed が、「積」には product が使われている。また5. 3. 1節には「量の値 (the value of a quantity) は数字 (number) と単位 (unit) の積として表され、単位に掛かる数字は、その単位で表された量の数値 (numerical value) を表す」とある。英語版を参照すると「掛かる」には multiplying が使われている。

第2章に7つの基本単位が示されている。即ち長さ、質量、時間、電流、熱力学温度、物質量、光度に対応した m, kg, s, A, K, mol, cd である。第5章には単位記号はローマン体を用いるとあり、第1章には量の記号はイタリック体で、次元の記号はサンセリフローマン体で常に表記されたとある。7つの量の記号は順に *l*, *m*, *t*, *i*, *T*, *n*, *I_v* となり、次元の記号は順に **L**, **M**, **T**, **I**, **Θ**, **N**, **J** のようになる。第2章では7つの基本量以外の量については基本単位を組み合わせる使用が示されている。例えばエネルギーという量を *E* で表すと、その次元は $\dim E = \mathbf{L}^2 \mathbf{M}^1 \mathbf{T}^{-2} \mathbf{I}^0 \mathbf{\Theta}^0 \mathbf{N}^0 \mathbf{J}^0$ であり、その単位は組立単位 $\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$ で表され、この単位は固有の名称 **J** (ジュール) で表される。7種の次元の右肩にある次元指数は「正か負かゼロである小さい整数」とある。第2章では、7つの基本量は便宜的に独立であると考えられているが多くの場合それらは互いに依存していることを知っておく必要があると書いてある。第1章では「組立単位は複数の基本単位をべき乗したものと定義される」とあり、一貫性のある (coherent) SI単位ということが強調されている。同時に第3章では接頭語が認められて、例えば $123\,500 \text{ m} = 123.5 \text{ km}$ のような便利な表示ができる。ここで *m* は一貫性のある単位であるが *km* は一貫性のない単位であるから矛盾を容認している。

第4章ではSIに属さない単位が表に分類されていて、SIに属さないが併用する単位としてヘクタール、リットル、トンなどが、その他の非SI単位としてデシベルなどが挙げられている。最近の話題としては、以前はSI補助単位としてラジアンとステラジアンがあったが、この階級は第20回CGPM決議8 (1995) によって廃止され、現在この2つの単位は次元1の組立単位の一つの扱いになっている。リットルにつ

いては従来 l が使われたが、数字の 1 との混同を配慮して大文字の L が第16回CGPM決議6 (1979) によって追加された。産業技術総合研究所が発行しているSI文書に準拠したパンフレット⁰²⁾によると、SIでは単位記号のフォントに関する制限はないものの、筆記体の l は適切でないこと、ならびに大文字の L が推奨されることが分かりやすく説明されている。

第5章では5. 3. 1節で「数値と単位との積として量の値を表現する場合、数値と単位は共に通常の代数演算の規則に従う」として、例えば $T = 293\text{ K}$ という式は $T/K = 293$ と書けるから、量/単位の形を表やグラフの軸の命名に便利に使えるとしている。5. 3. 3節では量の値の書式として「数値は常に単位の前に置き（原文は *always precedes the unit*）、数値と単位を分割するために空白（space）を用いる」とあり、「空白は乗算記号を表す」とある。従って、セルシウス度についても℃の前に空白を挿入すると説明している。5. 1節では単位記号について、「曖昧さを排除するための括弧がない場合、一つの表現の中で斜線を複数用いてはならない」としている。また「省略形を用いることは許されない」として、立方センチメートル（cubic centimetre）の代用としての cc などを使ってはならないとある。5. 3. 7節には無次元量の記述方法があり、「%は数字の0.01を表す」とある。また「無次元の分率の値を表す場合には、二つの同じ種類の単位の比を用いると便利である」として、 $0.3\text{ }\mu\text{V/V}$ などの例示がある。

次に工業規格JISであるが、関連する部分は次の通りである。JIS Z8202-0 の第2節には物理量の記号 A の単位記号を $[A]$ で、数値を $\{A\}$ で表す表現によって $A = \{A\} [A]$ と記述する部分がある。量の数値を抜き出すときは単位を下つきにして $\{A\}_{\text{単位}}$ と記述しても良いが $\{A\}$ は推奨しないとあり、量/単位（例えば T/K ）で表す方がよいとしている。JIS Z8203 の解説において、「SIによる単位及びそれに基づく換算値の併記方法」では「従来の単位及び数値のあとに $\{ \}$ 書きで表現」とし、「図表などで読み誤るおそれがない場合は $()$ 又は $[]$ でよい」としている。

国際単位系を歴史的にさかのぼると、1875年にパリで締結されたメートル条約に行き着く。この条約に日本が加盟したのは明治18年（1885）である。この単位系はメートル法と呼ばれるものであって、メートル、グラム、リットル、アールなどを基軸にした十進法の度量衡である。メートル法は1960年以降にSIに統一された。手元にある大正年間の文献を紹介すると、例えば大正4年発行の比留間吉勝による「計量大意度量衡」（日英堂、1915）は図を多く取り入れた縦書き漢字片仮名で書かれていて、例えば第二章第四節の「長サノ計量」では「佛國ノ分」として「メートル、M、米」が紹介されている。また直尺の説明では『二十「センチメートル」ヨリ一「メートル」位』のものもあるとの記述があり、単位は片仮名書きを「」で囲う様式で書かれている。大正14年発行の「メートル法度量衡教授の実際」（初等教育研究会篇、培風館、1925）では p.48 にメートル法の「世界的であること」などの長所と「その単位の呼称の長たらしいこと」などの短所を挙げている。第6章の「教授の実際」では第二学年から第六学年に至る詳しい教授法が示されている。第二学年では「2 3センチ」などの記述が、第三学年では「3958米」などの記述が、第五学年では「47.328kg」がみられ、東京横浜間の距離を「29.284k.m」などと数値と単位の間空白をおかず、かつ接頭語のあとにピリオドを置く混乱ぶりも見られる。

近年におけるSIの参考書では、McGlashan の訳書⁰⁵⁾ が示唆にとんだ指摘をしている。p.20では「かっこを使用するときには数学上の規則に従ったものでなければならないし、使用する順序は $[\{ (\cdots) \}]$ である。」と述べている。さらに p.65 では「物理量＝数値×単位」であると明記して「いかなる物理量も、またそれを書き表す記号も、特定の単位の採用を意味するものであってはならない。物理量、単位および数値を含む式に関する演算は代数学における通常の規則に従う。」としている。さらに p.67 において、数値表の見出しに従来用いられている「 $T(K)$ 」という表現は「 T と K の積を意味するので」不適当であるとして、この表現は「廃止されるべきで T/K のほうを選ぶべきである。」としている。極めて単純にして深く明快な説明である。即ち $3(m)$ は 3 m を意味するし、単位自体が括弧を伴うことを想定すれば $3[m/(s/s)]$ も 3 m を意味することで矛盾がない。入試問題で頻出する「～の量 $Q[m]$ を求めよ」という表現は、量は特定の単位を採用してはならないから $Q\text{ m}$ なる積を求める意味になり、従って Q は数値ということになり、矛盾した表現である。またグラフの軸に目盛りをつけ

て0, 1, 2などと数値をふったとき, 従来良く使われる「～の量 Q [m]」というラベルも不適格で, 「 Q/m 」に改めるべきであろう。なお, この書籍の中には単位に括弧をつけてはいけないという指摘は見当たらない。他の辞典類 (例えば高田誠二の量の表現辞典, 朝倉書店, 1994) や参考書 (例えば日本機械学会の機械工学SIマニュアル, 丸善, 1989) では括弧をつける表現が混在しているものの, 単位に括弧をつけるべきではないとの記述は見当たらない。

3. 数理学における量と表現

量について言及した文献で, 筆者の知る限り最も古いものは Maxwell の1873年2月1日付けの「電気と磁気に関する論文 (A Treatise on Electricity and Magnetism)」である。手元の Dover版⁰⁶⁾を参照しながら, p.1の冒頭を意識すると次のようになる。「量 (Quantity) の表現は2つの要素から成る。1つは標準 (standard) として参照される当該量と同種の既知量の名前 (name) であり, もう1つはその標準を何倍すれば (times) 当該量を作れるかを示す数 (number) である。標準量のほうを専門的 (technically) には単位 (Unit) と呼び, 数のほうを当該量の数値 (Numerical Value) と呼ぶ。」即ち, 「量 = (単位; 数値) : (単位; 数値) $\mapsto$ 数値 $\times$ 単位」である。このとき $\times$ の原文は times であり, SI文書では product にすり換えられている事に注意を要する。

話題を現代に戻す。大学教養課程水準の丁寧に書かれた良心的な教科書のうちの1冊, 原康夫の「物理学基礎」(第3版, 学術図書出版, 2004)を開くと p.7 に『物理量は「数値」 $\times$ 「単位」という形をしている』と書いてある。その後続く本論では一貫して量の記号を使った関係式によって物理学が展開されている。演習問題においては, 例えば p.54 には「ばね定数を $k = 100 \text{ N/m}$ とする。」などと, 一貫して単位に括弧を使わない書き方をしている。ところが巻末の「問, 演習問題の答」には単位に括弧をつけた表現もかなりの数が見受けられる。括弧は大括弧 [] で統一しているようである。そして「量 = 数値計算 = 数値 [単位]」の形がかなりの部分を占める。

Maxwellの時代から現在に至る過程で, どこかの時点で量の認識に関する転機があったものと考えられる。ここでは日本に限って過去にさかのぼってみる。先ず明治期においては明治12年の宇田健齋の「物理了案全」(伏水甘冥堂, 1879)に代表されるように, 縦書きで定性的な説明を以って物理学を涵養するタイプの書籍が主流であったようである。大正期に入ると田丸卓郎が大正6年(1917)に物理学講義⁰⁷⁾を著した。この p.2 では「量ヲ言ヒ現スニハ, ソレゾレ同種類ノ単位量ニ比較シテ, 単位量ノ何倍トイフ数ヲ使フ」と述べ, 長さ, 質量, 時間, 温度の4量の基本単位を使うことに言及し, p.3では「単位ヲ示サナイ言ヒ方」として, 量が単位を内包することを利用して, 量の算術によって単位を使わなくとも物理学が展開できることを説明している。本文は概ね量と数値を分けて構成されているが, 巻末の「入学試験問題集」の解答例(この部分は野田哲夫が担当している)では「数値計算 = 数値 単位」の形態が多く見られる。大正7年(1918)には森聰之助が物理学精義⁰⁸⁾を著して, p.8 には「物理量ヲ Q トシ, $[q]$ ヲ其単位量, n ヲ数値トスレバ $Q = n [q]$ 」と明示し「数値ノ次ニハ必ず単位量ヲ併記スルヲ要ス」と明記してあるから, 日本において Maxwell の水準はこの書を以って既に到達していることがうかがえる。この書においても巻末に「諸官立学校入学試験問題」があり, 解答例において一部「数値計算 = 数値 単位」の記述が見られる。

昭和初期からの物理学を概観すれば, 昭和2年の大久保準三による「最新物理学講義」(至文堂, 1927)では p.2 において量の測定の項に単位概念が現れ, 昭和3年の本多光太郎による「物理学詳解講義」(昭和新版, 内田老鶴圃, 1928)でも p.2 において基本単位の項で量の概念を説明している。いずれも本文中に「数値計算 = 数値 単位」の記述が見られる。一方実験物理学においては昭和9年の眞島正市らによる「応用物理学実験」(内田老鶴圃, 1934)の冒頭に測定誤差の取り扱いが見られ, 量と単位の表現については特に見られない。寺田寅彦の物理学序説⁰⁹⁾は異質な好書である。物理学の書でありながら数式をほとんど使うことなく物理の真髄を深く平易に捻じ込む迫力がある。起稿は大正9年(1920)で, 没後3分の1ほどの未校正原稿が未完のまま発見されたものを, 昭和22年に中谷宇吉郎が後書を添えて出版した。この p.33 に「連続的な量例へば長さや面積の如きものに数を応用する為には普通に所謂単

位が必要になる。それで何等かの根拠から人為的に或る単位を定めて此れをもって与へられたる量を計るといふ事によって其量は其中に含む単位量の数によって代表される。」とある。その後戦後に至る物理学の書を概観すると、量と単位の表現は当たり前のものとして広範囲にわたる分野を組織的に記述している特長が見受けられる。これは物理分野の細分化による弊害ではないかと思われる。例えば「新・物理学講座」（ダイヤモンド社、1963）では、49分冊中の1冊（B篇－1）が坪井忠二による「単位・次元・模型」であり、その始めの1ページが量の表現に費やされているに過ぎない。小谷正雄らの「物理学概説」（裳華房、1950）では、量の表現に言及することなく力学を始めている。

数学については、明治39年に高木貞治が量をまったく使わない数の学問としての「高等教育 代数学」（東京開成館、1906）を著している。昭和5年には米山國蔵が「数学の基礎（中巻）」（積善館、1930）を著し、その p.144 では分数の導入法として量的導入法、数的導入法、公理的導入法などを挙げ、また p.262 では負数の導入法として量的導入法を示している。具体的には氷点に対して -6 度とか、正午に対して -2 時間などの考察を以って、数の概念を構築する類である。

一般に数学は物理学から分離していて、単位の無い数を扱うことを常とする。確かに数の理論は美しい体系をなし、工学から見ても有効な切り札である。数学者の多くは「量は数の倍変換」であるから、数学がそのまま現実の物理現象に応用できるように誤解しておられるように思われる。ところが量の方は、量ごとに物理構造に張り付いた役割があり、それぞれ次元が決まっている。

一般に物理量はスカラー、ベクトル、テンソルのいずれかである¹⁰⁾。長さに類する量は単位 m を内包するが、 m を内包する量にも3つの種類がある。ひとつは長方形の長辺の長さのように、物差しを当てて方向を気にせずに測れる量であり、量は空間の片側（この場合は非負）にのみ存在する。このような量をユークリッド式量と呼ぶ。温度も絶対零度以下にならないのでユークリッド式量であり、質量も同様である。もう1つは大きさと方向を持っている量で、通常ベクトルと呼ばれ、線型空間量である。一方ベクトルに対する点が構成する空間をアフィン空間と呼び、これは線型構造を持たない。例えば変位はベクトルであり、位置はアフィン空間量である。時間経過に対する時刻、電位差に対する電位などがアフィン空間量である。いま、長さのベクトル量を $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ とすれば、それらベクトルの張る平行四辺形の面積 S は数学的に容易に求めることができ、 $S = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ である。ここで $\times$ はベクトルの外積である。面積はベクトル量であって、その大きさは平行四辺形の面積に等しく、向きは $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に右ネジを回す方向である。さら $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ と1次独立なベクトル $\mathbf{c}$ を用意して、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ の張る平行六面体の体積を V とすれば、これは S と同じ方向への $\mathbf{c}$ の高さ成分を面積に乗じて得られるから $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ である。ここで $\cdot$ はベクトルの内積である。従って、体積はスカラー量となる。長方形の面積を求める問題は $S = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の特別な例であって、ベクトル量をスカラー量に置き換えて、各量がユークリッド式量であることに注意すれば納得される。

ところで $2\text{ m} \times 3\text{ m} = 6\text{ m}^2$ は両辺が等しいであろうか。対象となる事物の属性として面積に注目すれば等しい。しかし右辺に移した段階で位相情報が欠落している。属性として形に注目すれば等しくはない。ひとたび右辺に移すと、左辺には戻せない。セロテープは左辺の表記が相応しい。

いま、電気系において電子の持つ電子素量 e^- の符号を変えたとしよう。教科書類の書き直しがあるにしても、対象としている系の構造が変わるわけではない。これが量の世界である。一方、数学の世界では（正数） $\times$ （正数）＝（正数）という簡単な構造でさえ、負号を付け替えると（負数） $\times$ （負数）＝（負数）は成立しなくなる。これが量と数の大きな違いである。

もう1つの例を挙げよう。数の系統を思い出してみると、はじめに自然数がある。そして自然数に0と自然数に負号をつけた数を合わせて整数となる。次に整数同士の割り算（ただし0で割ることを除く）ないし分数を導入して有理数となる。更に平方根などの無理数を合わせて実数となる。更に虚数単位 j を導入して複素数（ $a + jb$ ただし a 、 b は実数）となる。更に（ $a + ib + jc + kd$ ただし $a \sim d$ は実数）と拡張して四元数となり、 $a \sim d$ を複素数と置いて高級四元数となる。四元数以上では積の交換則が成り立たない。ここで実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を考えると、任意の2実数の加法と乗法が定義できる。加法に関して結合律、0の存在、反数（ $-x$ ）の存在を満足するので $\mathbf{R}$ は群となり、加法に関して可換律（交換法則）が成り立つので $\mathbf{R}$ はアーベル群となる。更に乗法に関して可換律（交換法則）、結合律、1

の存在及び分配律（分配法則）が成り立つので $\mathbf{R}$ は可換環となり、 $\mathbf{R}$ における $\{0\}$ の補集合について逆数 (x^{-1}) の存在を含めて $\mathbf{R}$ は可換体の構造を持つ。この構造をあわせ持つ $\mathbf{R}$ は実数体と呼ばれる。同様にして複素数の集合 $\mathbf{C}$ も可換体である。一方、実数 r ($r \in \mathbf{R}$) を数値に持つ長さの量 $q = r \text{ m}$ の集合 $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q} \ni q$) を考える。このとき任意の 2 量の加法は定義できるが、乗法は定義できない。なぜならば $q_1 q_2 = r_1 r_2 \text{ m}^2$ は面積であって、長さの量の集合 $\mathbf{Q}$ の元にはならないからである。それでは長さの量と面積の量を含む集合 $\mathbf{Q}'$ を考えるなら、今度は任意の 2 量の加法が定義できなくなる。なぜならば、長さとは面積は加算できないからである。このように、数と量は単位を枠とした倍変換であるが、数と量は代数的な構造が全く異なるのである。

4. 量の理論

先ず量を離散量と連続量に分けることから始めよう。前者は how many で問われる量であり、後者は how much で問われる量である。工学では一般に空間に分布する量 $f(x)$ の x を離散的にして量を標準化することを離散化 (discrete) と呼び、量 $f(x)$ 自体を離散化することを量子化 (quantize) と呼ぶ。ここでは両者を区別せずに離散なる語を使うことにする。離散量は 1, 2 などと整数で数えられる量であり、通常日本語では数詞を伴う。例えば 3 匹の犬, 2 個のミカンなどである。「数え方の辞典」(飯田朝子著, 小学館, 2004) には多くの助数詞が紹介されているが、括弧でくくるとの言及はない。減算は貸し借りで考えればよく、加算と定整数倍は容易に行えるが、除算には注意を要する。例えば $\div 2$ を等しい 2 つに割ることと定義するなら、1 本のチョコレート $\div 2$ は 2 本のチョコレートになり、1 頭の牛 $\div 2$ は骨付き牛肉 2 塊になるから牛は 0 頭である。離散量の除算では、商と余りで答を表すのが通例である。個数などの離散量は国際単位系 (SI) 表記では単位をつけない。

量の理論の第 1 として、水道方式の提唱者である遠山啓が説いた外延量と内包量の理論^{11) 12)} を紹介する。この理論では、まず量を分離量(1)と連続量に分ける。分離量は先に述べた離散量と同意である。次に連続量を外延量(2)と内包量に分ける。外延量 (extensive quantity) とは互いに合併すると互いの量が加法的 (additive) に扱える量のことであり、長さ、面積、質量などに加えて時間もこれに含める。内包量 (intensive quantity) とは性質の強さ (intensity) を表す量であり加法的ではないと考える。更に内包量を度(3)と率(4)に分ける。初等教育では生徒の発達に応じて(1)から(4)の順で量を教えるのが相応しいとする理論である。銀林は内包量を更に密度、勾配、流量、速度に分類している。遠山の範疇では内包量は (外延量) = (内包量) $\times$ (外延量) として存在意義がある。例えば速度 (距離 = 速度 $\times$ 時間) などのように名称に「度」がつく速度、密度、温度などのグループと、同種の外延量の比としての効率、確率などの率のグループに分類される。内包量が加法的でない説明として、体温 36°C の人を 100 人電車に乗せても 3600°C にはならないとか、速さの違う 2 人の走者が手をつないでも速度が加算されるわけではないなどと説かれる。しかしながら、流れのある川を泳ぐと流速と泳速が加算されることが反例となる。ゆえに内包量という分類は必ずしも厳密な分類ではないし、そのような量の理論が物理系を支配していると考えても困るが、算数教育の方途を示す羅針盤として有用な位置を占める理論には違いない。

量の理論の第 2 として、小島順の線型代数を紹介する。30 年も昔の事であるが、数学セミナー誌の 1977 年 7 月号から 1980 年 8 月号にかけて、にわかに「量の問題をめぐって」という記事が毎回のように掲載された。その発端は、小島順の著書「線型代数」¹³⁾ を、齋藤正彦が「論争を呼ぶ本」として紹介した (数学セミナー, 1976-9) ことにある。田村二郎¹⁴⁾ はユークリッド式量空間から対称量空間に至る著作 (数学セミナー, 1978-3~6) の中で、「私の議論の到達点は、おそらく小島理論の出発点となるであろう。」と述べている。さて小島理論^{13) 15) 16)} であるが、それに先立って量が線型空間の元となることを確認する。いま長さの量の全体 X を考えると、和 ($X \times X \rightarrow X; (x, y) \mapsto x + y$) と実数倍 ($\mathbf{R} \times X \rightarrow X; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$) が定義され、(1) 和の可換律、(2) 和の結合律、(3) ゼロが存在、(4) x に対する $-x$ なる反元が存在、(5) 積の λ に関する分配律、(6) 積の x に関する分配律、(7) 積の結合律、(8) $\lambda = 1$ のとき積に関して不変、の全てを満たすので、 X は線型空間である。

$m \in X$ をとると任意の長さ x は $x = \alpha m$ と一意に表される. 従って m は X の枠となる. X の双対空間 X^* はやはり線型空間で, m による測度 (measure) ($x = \alpha m \mapsto \alpha$) は X^* の元を定める. 次に長方形の面積を求めることを考える. 数学では, 既存の長さの量の線形空間 X , Y から新しく面積の量の線形空間 S を作り出す操作はテンソル積 $X \times Y \rightarrow S = X \otimes Y$ に相当する. ここで $x = \alpha m \in X$ および $y = \beta m \in Y$ とすれば $\otimes : (x, y) \mapsto x \otimes y = \alpha \beta (m \otimes m)$ となる. 一方, 速度を求めることを考えるなら, 数学では, 既存の長さの量の線形空間 X と既存の時間の量の双対空間 T^* から新しく速度の量の線形空間 V を作り出す操作はテンソル積 $X \times T^* \rightarrow V = X \otimes T^*$ に相当する. ここで $x = \alpha m \in X$ および $t = \tau s \in T$ とすれば $\otimes : (x, t^{-1}) \mapsto x \otimes t^{-1} = \alpha / \tau (m \otimes s^{-1})$ となる. 以上は1次元線型空間を想定しているのだから, 面積は $\alpha \beta (m \otimes m) = \alpha \beta m^2$ と置いてよく, 速度は $\alpha / \tau (m \otimes s^{-1}) = \alpha / \tau m/s$ と置いて差し支えない. 高次元線型空間についても同様の議論が成立するが, 詳しくは原著を参照されたい.

量の理論の第3として, 高橋利衛の説明に移る. これまでの量の理論は主に数学者がなしたものであるが, こちらの理論は工学的に広く深く展開しているのが特徴である. 第1著書¹⁷⁾ は工学的な見方を工学の学び方というテーマで論じた前例のない書籍である. 第2著書¹⁸⁾, 第3著書¹⁹⁾ は小島理論と同時期に出版されたもので, 「大きい本」と呼ばれている. 内容も随筆風に見えながら, 実は熱学や流体などにも及ぶ量の理論とその歴史的考察であって, 機軸は量の双対と類推にあると思われる. 高橋は小島理論の数学セミナーでの討論¹⁶⁾ にも参加していて, p.184 に単位に括弧をつけることについて貴重な発言をしている. 江沢洋 (物理学) が, 物理量を a と書いたとき a は単位を含むのか含まないのかと神経質に言う人がいたと発言し, 小島 (数学) が, ひとたび分からないと思えばぜんぜん分からないと受けると, 高橋は, 機械系では $f = 1.3 \text{ N}$ 式が正統で, 電気系では $e = 0.3 \text{ [V]}$ 式が多いと発言している. 江沢が, 長さなら $a \text{ [m]}$ と書くのかと問い, 齋藤正彦 (数学) が [] はどういう意味があるんですかと問うと, 高橋は, 「私の場合は ([m]) は単位名がメートルだという意味を表し, 単位量 m と区別したいからです. 」と答えている. 高橋は大きい本¹⁹⁾ でも p.6 に「特に手書きの場合は, 斜体と立体で量と単位を区別することが難しいので, [] を使う. () でもよいが, これはほかに用途が多いから, 残しておく. 」と記述している. 高橋理論については筆者の薄学をお詫びして, 双対と類推について説明することで責をふさぐ.

双対 (duality) とは類推 (analogy) の一種であるとの見方²⁰⁾ もあるが, ここでは類推を2つの対象領域の対応関係とし, 双対を1つの対象領域内での対応関係として話を進める. 双対の例示として電気回路系を対象領域に選ぶと, 次のような関係がある.

電圧 V	$\Leftrightarrow$	電流 I
抵抗 R (インピーダンス)	$\Leftrightarrow$	コンダクタンス G (アドミッタンス)
Ohmの法則 ($V = RI$)	$\Leftrightarrow$	Ohmの法則 ($I = GV$)
直列接続 ($R = \sum R_i$)	$\Leftrightarrow$	並列接続 ($G = \sum G_i$)
周回閉路 (loop)	$\Leftrightarrow$	接続接点 (node)
Kirchhoffの電圧則 ($\sum V_i = 0$)	$\Leftrightarrow$	Kirchhoffの電流則 ($\sum I_i = 0$)
Theveninの定理 (V と R の直列)	$\Leftrightarrow$	Nortonの定理 (I と G の並列)

論理学におけるANDとORも双対であるし, ゲーム理論のミニマックス法にも双対が現れる. Fourier変換と逆変換も双対であり, 量子力学においては粒子としての位置と波としての波数が双対であり, Maxwell方程式では電場と磁場に双対性が現れる. これらは線型空間と双対空間の関係に対応する関係とみられる. 高橋俊秀²⁰⁾ や数理科学の特集²¹⁾ に詳しい記事がある.

次に類推 (analogy) であるが, はじめに1つの対象領域について基本となる位差量 A_0 と流通量 T_0 を選ぶ. 位差量 (across quantity) とはある基準点からの差をもって決められる量であり, 流通量 (through quantity) とは流れを伴って通過する量である. 両者各々の時間微分を求めると, 夫々入れ替わって, 新たな位差量 $A = T_0'$ と流通量 $T = A_0'$ とが得られる. このとき4通りのペアを考えて次のような性質を持つように位差量と流通量の組を選ぶことにする.

1. $[A_0, T_0]$ は, 両者の積が作用量 (action) O となる.

2. (A, A_0) は、両者の積 / 2 が静的エネルギー E_s となり、比が蓄えを表す定数 s となる。
3. (T, T_0) は、両者の積 / 2 が動的エネルギー E_D となり、比が慣性を表す定数 m となる。
4. $\langle A, T \rangle$ は、両者の積がパワー P となり、比が抵抗を表す定数 r となる。

ここで 1 のペアと 4 のペアが双対性を有する。 $O, E_s + E_D, P$ が、高橋の言う不変量であり、各々 Js, J, J/s の単位を持つ。電気回路系では $\langle A, T \rangle = \langle \text{電圧 } V, \text{電流 } I \rangle$ と選べばよく、力学系では $[A_0, T_0] = [\text{変位 } x, \text{運動量 } p]$ と選べば 2 つの対象領域について量の構造が相似な対応関係で結ばれる。これら電気回路系と力学系の 2 つの対象領域について対応関係を X 型の図にして拙著²²⁾ に掲載したことがあるが、同様の Z 型の図が高橋利衛の第 1 著書¹⁷⁾ にある。類推は量構造の理論を形成できるといえる。

5. 教育と量

高専に入学する学生は小中学校で初等・中等普通教育を受けてくるわけで、その教材となる教科書と受験教材は議論から外せない。このうち教科書における数学の素養、特に量の涵養は言うまでもなく中心課題である。日本の数学教科書の起源^{23) 24)} は、国定制度時代の藤澤利喜太郎の黒表紙（尋常小学算術書）から塩野直道の緑表紙を経て昭和 23 年（1948）の検定制度に至る流れに象徴されるであろう。藤澤の「算術条目及教授法」（丸善，1895）には第二節に「此ノ量ト云フ様ナル外物的観念ヲ数学中ヨリ放逐スルコト（中略）ハ数学者、教育家ノ多年希望セルトコロナリシ、而シテ此ノ希望ハ今日ハ最早満足セラレタルモノナリ。」²⁵⁾ とあり、黒表紙は「量の放逐」とクロネッカーの「教え主義」に特長がある。緑表紙は「暗算主義」が特徴だといわれる。銀林²⁶⁾ は 1959 年に日本文教版「みんなの算数」を検定申請したときに、長方形の面積を「 $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$ 」と書くことは A 条件（絶対修正を要する指示）で削除され、「 $3 \times 4 = 12$. 答 12 cm^2 」と書けと指示された事を述べ、これを小島は「”文化” に対して加えられる直接的かつ明白な暴力」¹⁵⁾ と明記している。著者は小山市内の小中学校で今年度（2008）採用されている理数系科目の全教科書を私費で購入してみたが、1 万円ほどの散財となった。そして驚いた、絵本のようなのである。価格は 0 円で、税金によって「支給」とされていると書いてある。ゆとり教育の実態が「絵本主義」であれば、生徒の学力は下がるであろうし、高専入学生の水準も下がるであろう。しかも高専卒業者の社会の要求する水準は変わらないのである。購入した教科書は旧学習指導要領²⁷⁾ で検定済みであるから、これをつき合わせてみるとまた驚いた。学習指導要領をそのまま絵本にしたのが教科書だと思える。例えば「腎臓にもふれること」と書いてあれば教科書には腎臓の絵が出ている。今年度改定された学習指導要領（平成 20 年度版，明治図書，2008）を旧学習指導要領と比較すると確かに改定は行われている。現場の先生方の混乱が懸念されるが、本質的な改革はなさそうである。

教科書に現れた量と単位の表示について調べてみる。まず小学校算数（全 11 冊，教育出版，2008）では数値と単位の間にスペースがない例がある。時間の単位に s を使わず漢字の秒を使っている。リットルを筆記体の l で表すのは適切でない。それに限らず m, mm, g, kg, dl, m³, ha などが筆記体の斜体字で表されていて、SI に違反する。6 年下にはいろいろな単位とキログラム原器などが紹介されている。中学校数学（全 3 冊，東京書籍，2008）では変数が導入されている。変数は数値に対応させていて「一辺が $a \text{ m}$ の立方体」などの表示が適切である。時間の単位に s を使わず漢字の秒を使っている。速度を「毎秒 343.5 m 」などと表示している。数値間に成り立つ式を「公式」と呼んでいる。大きな問題は、量の計算で数値のみを抜き出して数値計算を実行し、最後に単位をつける方法をとっていることである。先の銀林の指摘は、現在も存続しているようである。

小学校理科（全 7 冊，啓林館，2008）では、数値と単位の間にスペースがない。また A, °C 以外の単位 m, cm, mm, g, mg などが筆記体の斜体字で表されていて、SI に違反する。時間の単位に s を使わず漢字の秒を使っている。リットルを筆記体の l で表すのは適切でない。天秤で重さ×距離を量でなくて数で扱っている。中学校理科（全 4 冊，啓林館，2008）では、数値と単位の間にスペースがない。時間の単位に s を使わず漢字の秒を使っている。単位の立体フォント、量の斜体フォントは問題がな

い、周波数の単位Hzを紹介しておきながら、「440ヘルツ」と表示している。表のラベルとグラフの軸は「量 [単位]」の形式であり、同社の小学校理科での形式「量 (単位)」と異なる表記をしている。練習問題の表示は問題なし、その解答も「量の計算＝量」としてあって問題なし。リットルを L で表してあり適切である。大きな問題は「密度 $[N/m^2] = \dots$ 」などと「量 [単位]」の形があり、量が単位を含むのか含まないのか混乱を招く。中学技術 (全1冊, 東京書籍 2008) では数値と単位の間スペースがない事を除けば特に問題は見当たらない。

受験教材として、入試過去問題集を調べてみよう。高専を受験する生徒は、このような問題集で勉強しないとは考えにくいからである。先ず高等専門学校の入試問題集 (5年間, 教英出版, 21年度) および (5年間, 東京学参, 21年度) を見て、出題が気になったのは18年度理科^[1]の問3の「質量を $a [g]$ 」である。題意より a が数値なのは自明で、「質量を $a g$ 」と出題すべきである。次に栃木県公立高校の入試問題集 (5年間, 東京学参, 21年度) および茨城県公立高校の入試問題集 (同) の出題で気になるのは、茨城県16年度理科2の(4)の「湿度 $[\%] = (\sim \text{の量} [g]) / (\sim \text{の} \boxed{A} [g]) \times 100$ 」である。SIでは%は数字である。「量 [単位]」の書き方は自己矛盾を含むのであるが、これは中学理科の教科書と表現が同じである。全国高校の理科 (1年間, 旺文社, 2009) にはラ・サール高校の理科^[1]の[B]の(1)に「抵抗 $R_1 [\Omega]$ 」を求める問題があり、 R_1 を数値と見るか量と見るかで意味が変わる。次に大学のセンター試験物理I (19年間, 教学社, 2009), 東京大学の物理 (25年間, 教学社, 2009), 京都大学の物理 (25年間, 教学社, 2009), 筑波大学理系 (4年間, 教学社, 2009) を見ると「量 $R [m]$ 」の形が実に多い。これは2つに意味に解釈できて、(1) R を量と見ると $R = r m$ で先の茨城県の出題と同じである; (2) R を数値と見ると量は $R m$ で先の高専の出題と同じである。一方、入試過去問題集には必ず解答と解説がつく。その中では「数値計算＝数値 [単位]」の型が頻出するのである。そして、高専の場合は教英出版と東京学参の解説では流儀が違うのも興味深い。中高生はこれを参照しないとは考えにくいから、高専の入学生はこのような札としての括弧つきの単位を使うのである。板書や答案は必ず手書きであるから、単位と変数をフォントで区別できず、従って括弧を積極的に使うのが良い。しかし「量＝数値計算」には注意しておく必要がある。更に一番困るのが「 $f (s)$ 」の形式で、(1) s を単位として f が数値、(2) f が量、他に(3) $f ()$ が s の関数、の合計3通りにとれる。出題者、教員はもとより受験生も気をつけなくてはいけない。なお印刷物であるなら $10 (\Omega)$ や $10 [\Omega]$ は冗漫で、単に 10Ω と書けばよい。

6. 結言

量の概念は古くに確立するも、現代においてすら十分に浸透していない。数学と理工学間のポケットに落ち込んだ問題である。2008年2月に機械学会の先端計測部会で講演を依頼された折、議長の許しを得て単位の括弧について専門家の意見を求めたことがある。力学標準の世界的な研究者である梅田章氏は「単位に括弧をつけない、数値と単位は積ではない」と発言された。日本のキログラム原器を管理する国の研究所に、かつて筆者は氏の部下として籍を置いたことがあり、誇りに思う。低い議論ではない、氏は単位、標準、SI文書を改革する立場にある。数値と単位が積ではないというのはMaxwellと同様に本質に沿った考え方である。標準は特別なものであり、ゆえにMaxwellは“times”の語を使っている。一方、決め事のSI文書は“product”の語を使い、数値と単位の順序を指定している。Productであるなら交換規則が成り立つはずで、 m の2倍のヒモの長さは $2 m$ でも $m \times 2$ でも良いのであるが、教師もSI文書も後者を許さない。 $2 m$ のヒモを3本つないだ長さは $2 m \times 3$ である。ある時は m に左からの積のみを強要し、あるときには右からの積を許す、この不自然さに疑問を感じないのは科学者の感覚としておかしい。電気系技術者の多くはdBを「ディービー」と読み、1 mWを基準とした絶対量の対数表現としてdBmなども多用する。これが現場の生きた単位である。雑音指数の評価量の単位 $V/Hz^{1/2}$ は次元指数を整数に固定するSIでは表現できない。情報量の単位bitもSIにはない。これらは単位であることを強調するために「」でくくった方が良い。SI文書も現時点では不完全さを抱え込んでいる。

さて、Maxwellの本質論は日本では大正年間に確立されたが定着したとは思えない。同じ大正年間から受験教材では「数値計算＝数値 [単位]」の流儀が始まって、今日でも広く流行している。学習指導要領の算数には「量と測定」の項がある。しかし教科書に「量 [単位]」という妙な表示があって改善されないのは、いまだに藤澤の「量の放逐」が日本に根ざしているからであろう。処方箋を述べる。国は教科書を少なくともSI準拠に改訂すること、高等教育機関では分野を問わずSIおよび量の本質を教育すること、高専にあっては全学科が1単位以上の横断型工学科目を必修にして、その中に量の理論を盛り込むこと、通時性と共時性を意識したカリキュラムに改革すること、学生は、括弧を使うかどうかを迷ったら括弧を外してみることに、その際、量と数値の違いに注意すること、在学中は教師に巻かれて卒業を優先すること、そして量の本質は別にあるのだと知って、将来は国と学校と教育を改革するほどの高い志を持つこと、以上を以て結言に代えさせていただく。

参考文献

- 01) 産総研計量標準総合センター：国際単位系 (SI) 国際文書第8版, 日本規格協会 (2007)
- 02) 同上：国際単位系 (S I) は世界共通のルールです, 計量標準総合センター (2008)
- 03) 日本規格協会：JISハンドブック 56 標準化, 日本規格協会 (2007)
- 04) 文部省：学術用語集 計測工学編 (増訂版), 計測自動制御学会 (1997)
- 05) M.L.McGlashan (関, 徂徠 (訳)) : SI単位と物理・化学量, 化学同人 (1974)
- 06) J.C.Maxwell : "A Treatise on Electricity & Magnetism," Vol.1, Dover (1954)
- 07) 田丸卓郎：中等教育 物理学講義, 東京開成館 (1917)
- 08) 森聰之助：最新 物理学精義, 積善館 (1918)
- 09) 寺田寅彦：物理学序説, 岩波書店 (1947)
- 10) 江沢洋：物理量のイメージ, 数理科学, No.383, pp.5-15 (1995)
- 11) 遠山啓：教師のための数学入門 (数量編), 国土社 (1960)
- 12) 銀林浩：量の世界・構造主義的分析, 教育文庫8, むぎ書房 (1975)
- 13) 小島順：線型代数, 日本放送出版協会 (1976)
- 14) 田村二郎：量と数の理論, 日本評論社 (1978)
- 15) 小島順：“量の計算”を見直す, 数学セミナー, 1977-8,9,10,11,12,1978-1 (1977,1978)
- 16) 小島順ほか：量の理論, 数学セミナー増刊, シンポジウム数学1, pp.137-191 (1980)
- 17) 高橋利衛：工学の創造的学習法 工学系の見方と考え方, オーム社 (1965)
- 18) 高橋利衛：基礎工学セミナー 量の理論, 現代数学社 (1974)
- 19) 高橋利衛：図説基礎工学対話 どのようにして量は捉えられたか, 現代数学社 (1979)
- 20) 高橋俊秀：双対と類推, 電子通信工学講座, A-2, 共立出版 (1960)
- 21) 江口徹ほか：特集・双対性 (デュアリティ), 数理科学, No.440 (2000)
- 22) 久保和良：高専における計測制御工学教育, 計測と制御, 46-9, pp.692-696 (2007)
- 23) 中村正弘, 寺田幹治：数学教育史, 槇書店 (1972)
- 24) 松宮哲夫：伝説の算数教科書<緑表紙>, 岩波書店 (2007)
- 25) 日本科学史学会 (編) : 日本科学技術史大系 第12巻, 第一法規, pp.189-190 (1969)
- 26) 銀林浩：量の問題をめぐって 発生的立場からも考えよう, 数学セミナー, 1978-2 (1978)
- 27) 文部科学省：小学校・中学校学習指導要領 (全2冊) 平成16年改訂版, 国立印刷局 (2004)

小山工業高等専門学校・電子制御工学科, kubo@oyama-ct.ac.jp

「受理年月日2008年9月29日」